

合肥市包河区 2023 - 2024 学年第二学期教学质量检测（一）

九年级数学试题卷

1. 在实数 0, -2, $\sqrt{5}$, 2 中, 最大的是 ()

A. 0

B. -2

C. $\sqrt{5}$

D. 2

【答案】C

2. 据报道, 去年我国消费水平快速增长, 社会消费品零售总额约为 471000 亿元, 数 471000 亿用科学记数法表示正确的是 ()

A. 4.71×10^5

B. 4.71×10^8

C. 4.71×10^{12}

D. 4.71×10^{13}

【答案】D

3. 下列运算正确的是 ()

A. $(a^2)^3 = a^5$

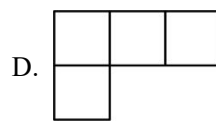
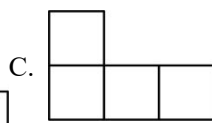
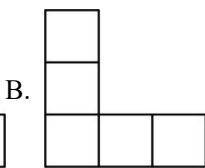
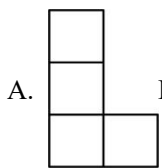
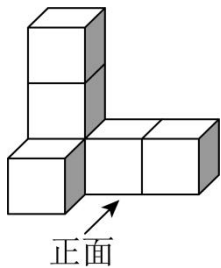
B. $3a^2 + a = 3a^3$

C. $a^5 \div a^2 = a^3 (a \neq 0)$

D. $a(a+1) = a^2 + 1$

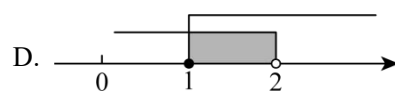
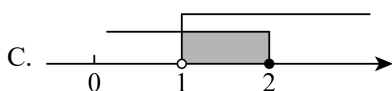
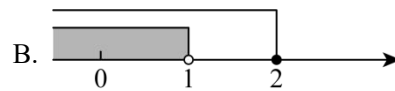
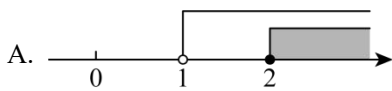
【答案】C

4. 如图所示的几何体, 它的左视图是 ().



【答案】A

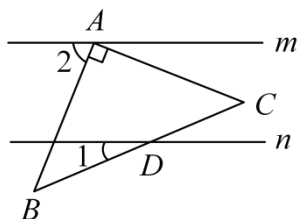
5. 不等式组 $\begin{cases} 2x+1 > 3 \\ 3x-5 \leq 1 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



【答案】C

6. 已知直线 $m \parallel n$ ，将一块含 45° 角的直角三角板 ABC 按如图方式放置，其中斜边 BC 与直线 n 交于点 D 。

若 $\angle 1 = 25^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ）



A. 60°

B. 65°

C. 70°

D. 75°

【答案】C

【解析】

【分析】先求出 $\angle AED = \angle 1 + \angle B = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ$ ，再根据平行线的性质可知 $\angle 2 = \angle AED = 70^\circ$ 。

【详解】设直线 n 与 AB 的交点为 E 。

$\because \angle AED$ 是 $\triangle BED$ 的一个外角，

$\therefore \angle AED = \angle B + \angle 1$ ，

$\because \angle B = 45^\circ$ ， $\angle 1 = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle AED = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ$ ，

$\because m \parallel n$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle AED = 70^\circ$ 。

故选 C。

【点睛】本题主要考查了平行线的性质以及三角形外角性质，解题的关键是借助平行线和三角形内外角转化角。

7. 某公司今年 2 月份的利润为 x 万元，3 月份比 2 月份减少 7%，4 月份比 3 月份增加了 8%，则该公司 4 月份的利润为（单位：万元）（ ）

A. $(x - 7\%)(x + 8\%)$

B. $(x - 7\% + 8\%)$

C. $(1 - 7\% + 8\%)x$

D. $(1 - 7\%)(1 + 8\%)x$

【答案】D

【解析】

【分析】首先利用下降率的意义表示出 3 月份的利润，然后利用增长率的意义表示出 4 月份的利润。

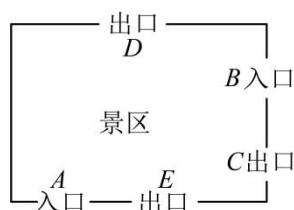
【详解】由题意得，3 月份利润为 $(1 - 7\%)x$ ，

则4月份利润为 $(1-7\%)(1+8\%)x$,

故选: D.

【点睛】本题考查了列代数式, 正确理解增长率以及下降率的定义是关键.

8. 如图, 十一旅游黄金周期间, 某景区规定 A 和 B 为入口, C, D, E 为出口, 小红随机选一个入口进入景区, 游玩后任选一个出口离开, 则她选择从 A 入口进, 从 D 出口离开的概率是 ()



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

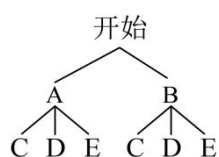
D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查的是求概率问题, 掌握树状图的画法和概率公式是解决此题的关键.

【详解】解: 画树状图如图:

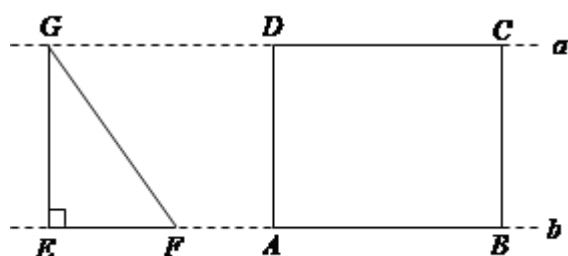


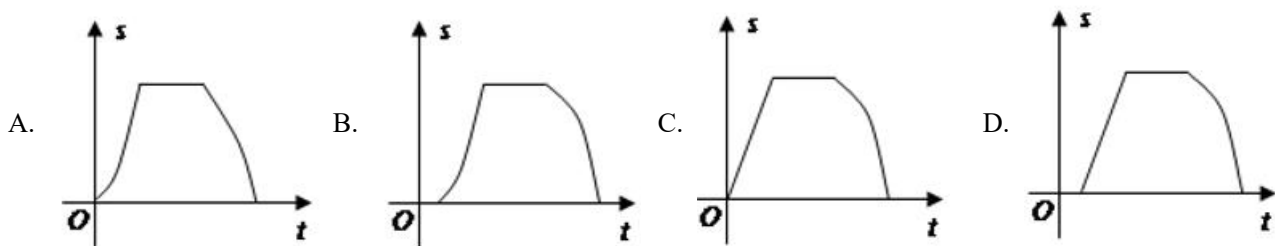
由树形图可知所有可能的结果有6种, 小红从入口 A 进入景区并从 D 出口离开的有1种情况,

$\therefore$ 小红从入口 A 进入景区并从 D 出口离开的概率为 $\frac{1}{6}$.

故选 B.

9. 如图, 点 G, D, C 在直线 a 上, 点 E, F, A, B 在直线 b 上, 若 $a \parallel b$, $Rt\triangle GEF$ 从如图所示的位置出发, 沿直线 b 向右匀速运动, 直到 EG 与 BC 重合. 运动过程中 $\triangle GEF$ 与矩形 $ABCD$ 重合部分的面积 (S) 随时间 (t) 变化的图象大致是 ()





【答案】B

【解析】

【分析】

【详解】根据题意可得：①F、A 重合之前没有重叠面积，

②F、A 重叠之后，设 EF 变重叠部分的长度为 x ，则重叠部分面积为 $S = \frac{1}{2}x \cdot x \tan \angle EFG = \frac{1}{2}x^2 \tan \angle EFG$

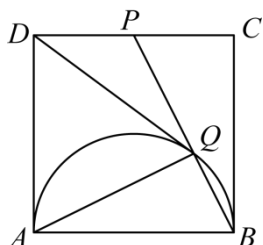
$\therefore$ 是二次函数图象，

③ $\triangle EFG$ 完全进入且 F 与 B 重合之前，重叠部分的面积是三角形的面积，不变，

④F 与 B 重合之后，重叠部分的面积等于 $S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}x^2 \tan \angle EFG$ 符合二次函数图象，直至最后重叠部分的面积为 0.

综上所述，只有 B 选项图形符合. 故选 B.

10. 如图，已知，正方形 $ABCD$ 边长为 1，以 AB 为直径在正方形 $ABCD$ 内部作半圆，点 P 是 CD 边的中点， BP 与半圆交于点 Q ，连接 DQ . 下列结论错误的是 ().



- A. $DQ = 1$ B. $\frac{PQ}{BQ} = \frac{3}{2}$ C. $S_{\triangle PDQ} = \frac{3}{20}$ D. $\cos \angle ADQ = \frac{2}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】A、正确. 连接 OQ, OD ，易证四边形 $DOBP$ 是平行四边形，从而可得 $DO \parallel BP$. 结合 $OQ = OB$ ，可证到 $\angle AOD = \angle QOD$ ，从而证到 $\triangle AOD \cong \triangle QOD$ ，则有 $DQ = DA = 1$ ；

B、正确. 连接 AQ ，根据勾股定理可求出 BP ，易证 $\text{Rt}\triangle AQB \sim \text{Rt}\triangle BCP$ ，运用相似三角形的性质可求出

BQ ，从而求出 PQ 的值，就可得到 $\frac{PQ}{BQ}$ 的值；

C、正确过点 Q 作 $QH \perp DC$ 于 H ，易证 $\triangle PHQ \sim \triangle PCB$ ，运用相似三角形的性质可求出 QH ，从而可求出 $S_{\triangle PDQ}$ 的值；

D、错误. 过点 Q 作 $QN \perp AD$ 于 N ，易得 $DP \parallel NO \parallel AB$ ，根据平行线分线段成比例可得 $\frac{DN}{AN} = \frac{PQ}{BQ} = \frac{3}{2}$ ，

把 $AN = 1 - DN$ 代入，即可求出 DN ，然后在 $\text{Rt}\triangle DNO$ 中运用三角函数的定义，就可求出 $\cos \angle ADQ$ 的值.

【详解】连接 OQ, OD ，如图1.

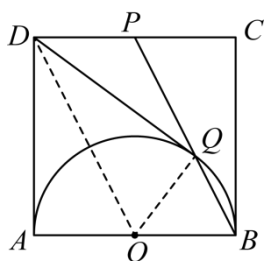


图1

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为1，以 AB 为直径作半圆，点 P 是 CD 中点，

$$\therefore AB \parallel CD, OA = OB = \frac{1}{2}, DP = \frac{1}{2}$$

$$\therefore DP = OB, DP \parallel OB,$$

$\therefore$ 四边形 $DOBP$ 是平行四边形，

$$\therefore DO \parallel BP.$$

$$\therefore \angle AOD = \angle OBQ, \angle DOQ = \angle OQB$$

$$\because OQ = OB,$$

$$\therefore \angle OBQ = \angle OQB,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle QOD,$$

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle QOD$ 中，

$$\begin{cases} OD = OD \\ \angle AOD = \angle QOD, \\ OA = OQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle QOD (\text{SAS}),$$

$$\therefore DQ = DA = 1.$$

故 A 正确;

连接 AQ , 如图 2.

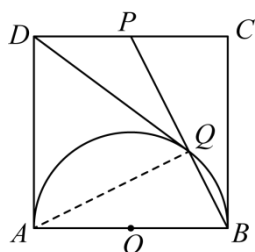


图2

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 P 是 CD 中点,

$$\therefore CP = \frac{1}{2}, \angle C = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore BP = \sqrt{BC^2 + CP^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$\because AB$ 为直径,

$$\therefore \angle AQB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAQ + \angle ABQ = 90^\circ, \angle PBC + \angle ABQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAQ = \angle PBC,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AQB \sim \text{Rt}\triangle BCP,$$

$$\therefore \frac{BQ}{PC} = \frac{AB}{BP}, \text{ 即 } \frac{BQ}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}},$$

$$\therefore BQ = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{则 } PQ = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}, \therefore \frac{PQ}{BQ} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{3}{2},$$

故 B 正确;

过点 Q 作 $QH \perp DC$ 于 H ，如图3.

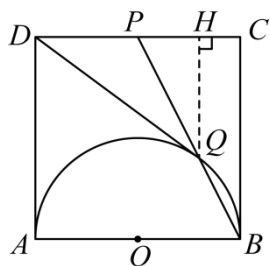


图3

$$\because CH \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle PHQ \sim \triangle PCB,$$

$$\therefore \frac{QH}{BC} = \frac{PQ}{PB}, \text{ 即 } \frac{QH}{1} = \frac{\frac{10}{\sqrt{5}}}{\frac{5}{2}},$$

$$\therefore QH = \frac{3}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle DPQ} = \frac{1}{2} DP \cdot QH = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20},$$

故 C 正确;

过点 Q 作 $QN \perp AD$ 于 N ，如图4.

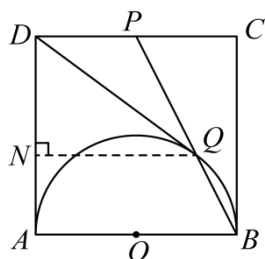


图4

$$\because DP \parallel NQ \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{DN}{AN} = \frac{PQ}{BQ} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{DN}{1-DN} = \frac{3}{2},$$

$$\text{解得: } DN = \frac{3}{5},$$

$$\therefore DQ = 1,$$

$$\therefore \cos \angle ADQ = \frac{DN}{DQ} = \frac{3}{5},$$

故 D 错误.

故选 D

【点睛】本题主要考查了圆周角定理、平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、平行线分线段成比例、等腰三角形的性质、平行线的性质、锐角三角函数的定义、勾股定理等知识，综合性比较强，常用相似三角形的性质、勾股定理、三角函数的定义来建立等量关系，应灵活运用.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

11. 计算： $\sqrt{4} + (-3)^0 =$ _____.

【答案】3

【解析】

【分析】本题主要考查了实数的运算，掌握零次幂和算术平方根是解答本题的关键. 先根据零次幂、算术平方根化简，然后再计算即可.

【详解】 $\sqrt{4} + (-3)^0 = 2 + 1 = 3$.

故答案为：3.

12. 化简： $\frac{2a}{a^2-4} - \frac{1}{a-2} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{a+2}$

【解析】

【详解】【分析】原式通分并利用同分母分式的减法法则计算，约分即可得到结果.

【详解】原式 $= \frac{2a}{(a+2)(a-2)} - \frac{a+2}{(a+2)(a-2)}$

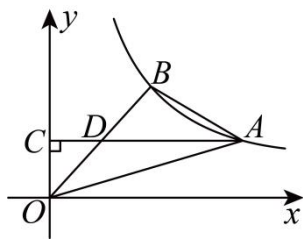
$$= \frac{a-2}{(a+2)(a-2)}$$

$$= \frac{1}{a+2},$$

故答案为 $\frac{1}{a+2}$.

【点睛】本题考查了分式的加减法，熟练掌握分式加减法的运算法则是解本题的关键.

13. 如图, A, B 是反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 图象上的两点, 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴, 垂足为 C , AC 交 OB 于点 D . 若 D 为 OB 的中点, 则 $\triangle ABD$ 的面积为_____.



【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数系数 k 的几何意义、反比例函数图象上点的坐标特征, 解答本题的关键是根据题意可以分别表示出点 A, D 的坐标, 然后根据 $\triangle AOD$ 的面积为 $\frac{1}{2} AD \cdot (y_B - y_D)$, 即可求解.

【详解】 设点 B 的坐标为 $\left(2m, \frac{6}{m}\right)$, 则点 D 的坐标为 $\left(m, \frac{3}{m}\right)$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为纵坐标为 $\frac{3}{m}$, 横坐标为: $\frac{12}{\frac{3}{m}} = 4m$,

$\therefore AD = 4m - m = 3m$,

$\therefore \triangle AOD$ 的面积为 $\frac{1}{2} AD \cdot (y_B - y_D) = \frac{1}{2} \times 3m \times \left(\frac{6}{m} - \frac{3}{m}\right) = \frac{9}{2}$,

故答案为: $\frac{9}{2}$.

14. 如图 1, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 8\sqrt{3}$, $AD = 10$, 点 E 是 CD 中点, 将这张纸片依次折叠两次; 第一次折叠纸片使点 A 与点 E 重合, 如图 2, 折痕为 MN , 连接 ME, NE ; 第二次折叠纸片使点 N 与点 E 重合, 如图 3, 点 B 落到 B' 处, 折痕为 HG , 连接 HE . 完成下面的探究:

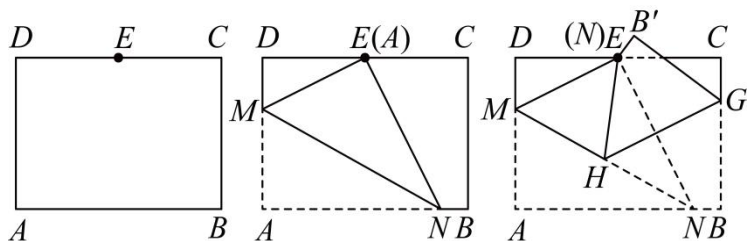


图1

图2

图3

- (1) 线段 DM 的长是_____;
- (2) $\tan \angle EHG =$ _____.

【答案】 ①. 2.6 ②. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ## $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】如图2中，作 $NF \perp CD$ 于 F ．设 $DM = x$ ，则 $AM = EM = 10 - x$ ，利用勾股定理求出 x ，再利用 $\triangle DME \sim \triangle FEN$ ，得 $\frac{DE}{FN} = \frac{EM}{EN}$ ，求出 EN ， EM ，求出 $\tan \angle AMN$ ，再证明 $\angle EHG = \angle AMN$ 即可解决问题．

【详解】解：如图2中，作 $NF \perp CD$ 于 F ．

设 $DM = x$ ，则 $AM = EM = 10 - x$ ，

$$\because DE = EC, AB = CD = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} CD = 4\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle DEM$ 中，

$$\because DM^2 + DE^2 = EM^2,$$

$$\therefore (4\sqrt{3})^2 + x^2 = (10 - x)^2,$$

解得 $x = 2.6$ ，

$$\therefore DM = 2.6, AM = EM = 7.4,$$

$$\because \angle DEM + \angle NEF = 90^\circ, \angle NEF + \angle ENF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEM = \angle ENF,$$

$$\because \angle D = \angle ENF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DME \sim \triangle FEN,$$

$$\therefore \frac{DE}{FN} = \frac{EM}{EN},$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{3}}{10} = \frac{7.4}{EN},$$

$$\therefore EN = \frac{37\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore AN = EN = \frac{37\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \tan \angle AMN = \frac{AN}{AM} = \frac{5\sqrt{3}}{6},$$

如图3中，

$$\because ME \perp EN, HG \perp EN,$$

$$\therefore EM \parallel GH,$$

$$\therefore \angle NME = \angle NHG,$$

$$\because \angle NME = \angle AMN, \angle EHG = \angle NHG,$$

$$\therefore \angle AMN = \angle EHG,$$

$$\therefore \tan \angle EHG = \tan \angle AMN = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

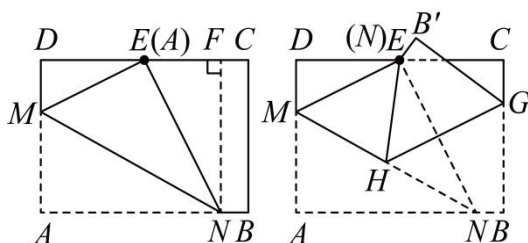


图2

图3

故答案为: 2.6; $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

【点睛】本题考查翻折变换、勾股定理、相似三角形的判定和性质，锐角三角函数的应用等知识，解题的关键是学会把问题转化，证明 $\angle AMN = \angle EHG$ 是关键.

三、(本大题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分)

15. 解方程: $x^2 - 2x - 8 = 0$.

【答案】 $x_1 = 4, x_2 = -2$

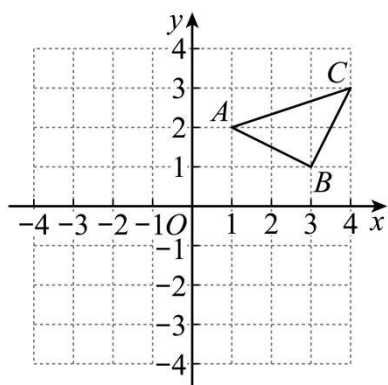
【详解】解: $x^2 - 2x - 8 = 0$,

因式分解得: $(x-4)(x+2) = 0$,

$$\therefore x-4=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

解得: $x_1 = 4, x_2 = -2$.

16. 如图，在边长为 1 个单位长度的正方形网格中建立平面直角坐标系， $\triangle ABC$ 的顶点都在格点（网格线的交点）上.



(1) 作 $\triangle ABC$ 关于原点 O 对称的 $\triangle A_1B_1C_1$ ，并写出点 A_1 的坐标.

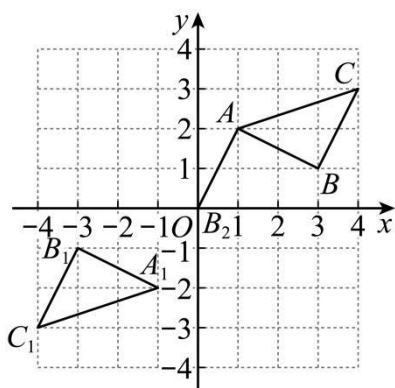
(2) 将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AB_2 ，求点 B 所走的路径 $\widehat{BB_2}$ 的长度 (结果保留 π).

【答案】(1) 见解析; $(-1, -2)$

(2) $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

【小问 1 详解】

解: 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;



点 A_1 的坐标为 $(-1, -2)$;

【小问 2 详解】

解: 根据题意得: $\angle BAB_2 = 90^\circ$, $AB = AB_2 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,

$\therefore$ 点 B 所走的路径 $\widehat{BB_2}$ 的长度为 $\frac{90\pi \times \sqrt{5}}{180} = \frac{\sqrt{5}\pi}{2}$.

四、(本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 满分 16 分)

17. 观察下列等式:

$$a_1 = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{1 \times 3}; \quad a_2 = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \times 4}; \quad a_3 = \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{4} = \frac{4}{3 \times 5} \dots$$

(1) 猜想并写出第 6 个等式 $a_6 =$ _____；

(2) 猜想并写出第 n 个等式 $a_n =$ _____；

(3) 证明 (2) 中你猜想的正确性.

【答案】(1) $\frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{6 \times 8}$ ；

(2) $\frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n \times (n+2)}$ ；

(3) 证明见解析.

【小问 1 详解】

解：观察等式可知， $a_6 = \frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{6 \times 8}$ ，

故答案为 $\frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{6 \times 8}$ ；

【小问 2 详解】

解：观察等式，可得规律： $a_n = \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n \times (n+2)}$ ，

故答案为： $\frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n \times (n+2)}$ ；

【小问 3 详解】

证明：左边 $= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{1+n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n(n+2)} = \text{右边},$$

$$\therefore \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+2)}.$$

【点睛】 本题考查了分式规律性问题，分式的加减运算，熟练掌握相关运算法则，能通过观察找出规律是解题关键.

18. “双 11” 已经发展成了所有电商平台的节日，也是全民购物的节日. 在“双 11” 期间，各大电商平台刮起购物狂潮. 某平台甲、乙、丙三个直播间的促销活动如表：

直播间	活动方案
-----	------

甲	全场按标价的 6 折销售
乙	实行“满 100 元送 100 元购物券”（如：购买衣服 220 元，赠 200 元购物券，购物券可直接用于下次购物）
丙	实行“满 100 元减 50 元”（如：购买 220 元的商品，只需付款 120 元）

甲、乙、丙直播间同时出售一种标价为 380 元的电饭煲和一种标价为 a ($300 < a < 400$) 元的电磁炉.

- (1) 如果在甲、丙两个直播间分别购买电饭煲，哪个直播间更合算？请通过计算说明；
- (2) 若小丽妈妈想买这两样厨房用具，小丽通过计算发现在甲直播间购买电饭锅和电磁炉，与在乙直播间先买电饭锅，再买电磁炉所付的钱数相同，求 a 的值.

【答案】(1) 在甲直播间购买更合算，理由见解析

(2) $a = 370$

【小问 1 详解】

解：在甲直播间购买更合算，理由如下：

依题意得：甲直播间的费用为 $380 \times 0.6 = 228$ 元，

丙直播间的费用为 $380 - 3 \times 50 = 230$ 元，

$\because 228 < 230$,

$\therefore$ 在甲直播间购买更合算；

【小问 2 详解】

解：由题意得， $0.6(380 + a) = 380 + a - 300$,

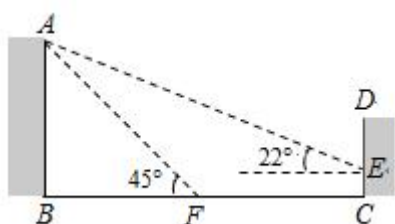
解得 $a = 370$

五、(本大题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分)

19. 如图，某教学楼 AB 的后面有一建筑物 CD ，当光线与地面的夹角是 22° 时，教学楼在建筑物的墙上留下高 2m 的影子 CE ；而当光线与地面的夹角是 45° 时，教学楼顶 A 在地面上的影子 F 与墙角 C 的距离为 18m (B 、 F 、 C 在一条直线上).

求教学楼 AB 的高度. (结果保留整数)

(参考数据： $\sin 22^\circ \approx 0.37$, $\cos 22^\circ \approx 0.93$, $\tan 22^\circ \approx 0.40$.)

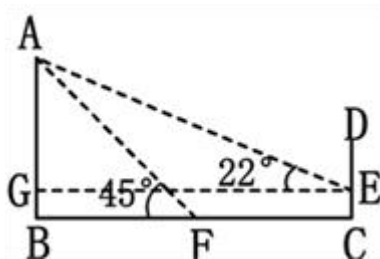


【答案】15m

【解析】

【分析】首先构造直角三角形 $\triangle AEG$ ，利用 $\tan 22^\circ = \frac{AG}{GE}$ ，求出即可；

【详解】过点E作 $EG \perp AB$ 于G，则四边形BCEG是矩形，



$$\therefore BC=EG, BG=CE=2\text{m}$$

设教学楼AB的高为xm,

$$\because \angle AFB=45^\circ \therefore \angle FAB=45^\circ, \therefore BF=AB=x\text{m}, \therefore EG=BC=(x+18)\text{m}, AG=(x-2)\text{m}$$

在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中， $\angle AEG=22^\circ$

$$\because \tan \angle AEG = \frac{AG}{EG},$$

$$\therefore \tan 22^\circ = \frac{x-2}{x+18}$$

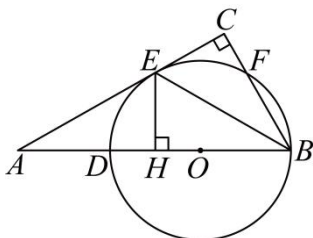
$$\therefore 0.40 = \frac{x-2}{x+18}$$

解得： $x \approx 15\text{m}$.

答：教学楼AB的高约为15m

【点睛】此题主要考查了解直角三角形的应用，根据已知得出 $\tan 22^\circ = \frac{AG}{GE}$ 是解题关键.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，点D是AB边上一点，以BD为直径的 $\odot O$ 与边AC相切于点E，与边BC交于点F，过点E作 $EH \perp AB$ 于点H，连接BE.

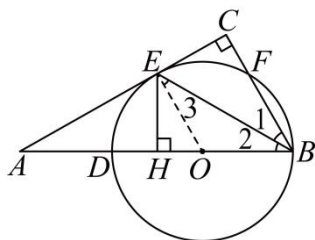


(1) 求证： $BC=BH$ ；

(2) 若 $AB=5$ ， $AC=4$ ，求CE的长.

【小问1 详解】

证明：连接OE，如图，



$\because AC$ 为切线,

$\therefore OE \perp AC$,

$\therefore \angle AEO = 90^\circ$,

$\because \angle C = 90^\circ$,

$\therefore OE \parallel BC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

$\because OB = OE$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore EH = EC$,

在 $\text{Rt}\triangle BEH$ 和 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中

$$\begin{cases} BE = BE \\ EH = EC \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BEH \cong \text{Rt}\triangle BEC (\text{HL})$,

$\therefore BC = BH$;

【小问 2 详解】

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

设 $OE = r$, 则 $OA = 5 - r$,

$\because OE \parallel BC$,

$\therefore \triangle AOE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{OE}{BC}, \text{ 即 } \frac{5-r}{5} = \frac{r}{3}, \text{ 解得 } r = \frac{15}{8},$$

$$\therefore AO = 5 - r = \frac{25}{8},$$

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中,

$$AE = \sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2 - \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore CE = AC - AE = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}.$$

【点睛】本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径. 若出现圆的切线，必连过切点的半径，构造定理图，得出垂直关系. 也考查了相似三角形的判定与性质.

六、(本题满分 12 分)

21. 某校为了解七、八年级学生对食品安全知识的掌握情况，从七、八年级各随机抽取 20 名学生进行测试，并对成绩(百分制)进行收集、整理和分析. 部分信息如下：

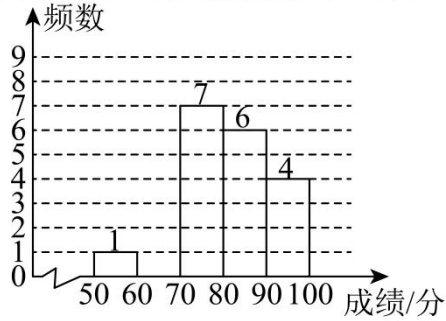
【收集数据】七年级：56，59，60，62，66，67，68，76，79，80，83，84，85，85，87，87，87，90，92，99.

【整理数据】

成绩/ 分年级	$50 \leq x < 60$	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$	$80 \leq x < 90$	$90 \leq x \leq 100$
七年级	2	5	2	a	3
八年级	1	m	7	6	4

【分析数据】

八年级学生成绩频数分布直方图



年级	平均数	中位数	众数
七年级	77.6	b	87
八年级	80.35	79.5	86

请根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 填空： $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ，并补全频数分布直方图；
- (2) 若该校七年级学生共有 800 人，假设全部参加此次测试，请估计七年级测试成绩超过平均数 77.6 分的

人数.

(3) 小琳同学参加了测试,她说“这次测试我得了81分,在我们年级属于中游略偏上!”你认为小琳同学可能是哪个年级的学生?简述你的理由.

【答案】(1) 8, 81.5, 图见解析

(2) 480

(3) 小琳同学可能是七年级的学生,理由见解析

【小问1详解】

解: $a = 20 - 2 - 5 - 2 - 3 = 8$ (人),

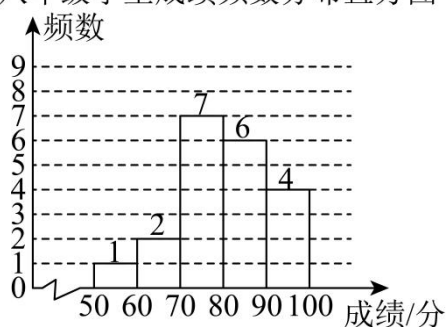
将这20名学生的成绩从小到大排列,处在中间位置的两个数的平均数为 $\frac{80+83}{2} = 81.5$, 因此中位数是81.5, 即 $b = 81.5$,

故答案为: 8, 81.5;

$\therefore m = 20 - (1 + 7 + 6 + 4) = 2$ (人),

$\therefore$ 补全的频数分布直方图如解图所示:

八年级学生成绩频数分布直方图



【小问2详解】

$$800 \times \frac{1+8+3}{20} = 480 \text{ (人)}.$$

答: 估计七年级测试成绩超过平均数77.6分的大约为480人.

【小问3详解】

小琳同学可能是七年级的学生

理由: 小琳同学的成绩在年级属于中游略偏上,说明小琳的成绩比中位数要略大,即他所在年级测试成绩的中位数比83略小, $81.5 < 83$,

所以,小琳同学可能是七年级的学生

七、(本题满分12分)

22. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 E , 过点 B 作 $BD \perp CD$ 于点 D .

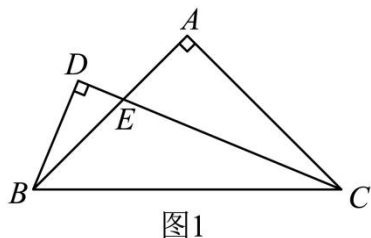


图1

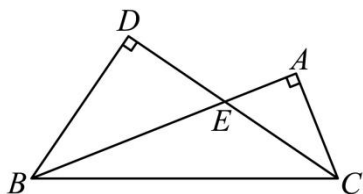


图2

(1) 如图 1, 当 $AB = AC$ 时,

①求 $\angle DBE$ 的度数;

②探究线段 BD 与 CE 的数量关系, 并加以证明;

(2) 如图 2, 当 $AB = \frac{5}{2}AC$ 时, 求 $\frac{BD}{CE}$ 的值.

【答案】(1) ① 22.5° ② $EC = 2BD$, 理由见解析

(2) $\frac{BD}{CE} = \frac{5}{4}$

【解析】

【分析】本题主要考查的是等腰直角三角形的性质以及全等三角形的判定和性质的综合应用, 作辅助线构造出与所求和已知相关的全等三角形, 是解答本题的关键.

(1) ①根据等腰直角三角形的性质得出 $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$, 再利用角平分线的定义得到 $\angle BCD = \angle ACD = 22.5^\circ$, 然后得到 $\angle DBC = 67.5^\circ$, 解答即可;

②延长 BD 和 CA 交于点 F , 得出 $BF = 2BD$, 再证明 $\triangle AFB \cong \triangle AEC$, 利用全等三角形的性质解答即可;

(2) 延长 BD 和 CA 交于点 F , 得出 $BF = 2BD$, 然后证明 $\triangle AFB \sim \triangle AEC$, 根据相似三角形的性质得到结论即可.

【小问 1 详解】

① $\because \angle A = 90^\circ, AB = AC,$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$

又 $\because CD$ 平分 $\angle ACB,$

$\therefore \angle BCD = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ,$

又 $\because BD \perp CD,$

$\therefore \angle DBC = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ,$

$\therefore \angle DBE = \angle DBC - \angle ABC = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ;$

② $EC = 2BD$, 理由为:

延长 BD 和 CA 交于点 F ,

$\because BD \perp CD, \angle BCD = \angle ACD,$

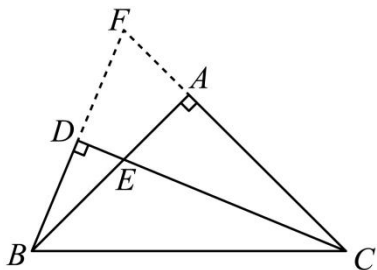
$\therefore \angle F = \angle FBC,$

$$\therefore BF = 2BD,$$

$$\text{又} \because \angle DBE = \angle ACD = 22.5^\circ, \angle FAB = \angle CAE = 90^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle AEC,$$

$$\therefore EC = BF = 2BD;$$



【小问 2 详解】

延长 BD 和 CA 交于点 F ,

$$\because CD \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

$$\because BD \perp CD,$$

$$\therefore \angle F = \angle FBC,$$

$$\therefore BF = 2BD,$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 90^\circ,$$

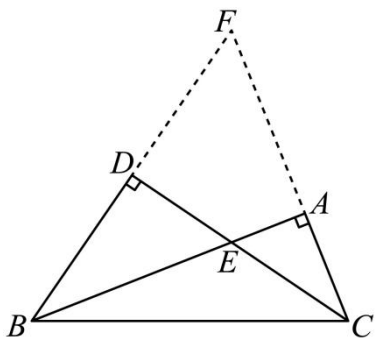
$$\therefore \angle DBE + \angle F = \angle DCA + \angle F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DCA,$$

$$\therefore \triangle AFB \sim \triangle AEC,$$

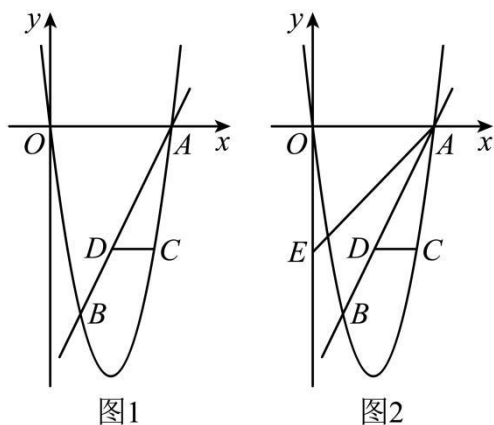
$$\therefore \frac{BF}{CE} = \frac{BA}{AC} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{5}{4}.$$



八、(本题满分 14 分)

23. 如图 1, 点 A 的坐标为 $(4, 0)$, 抛物线 $M_1: y = ax^2 + bx (a \neq 0)$ 过点 A , 点 B 为第四象限内抛物线上一点, 其纵坐标为 -6 , $\tan \angle OAB = 2$.



- (1) 求抛物线 M_1 的表达式；
- (2) 点 C 为直线 AB 下方的抛物线上一动点，过点 C 作 $CD \parallel x$ 交直线 AB 于点 D ，设点 C 的横坐标为 h ，当 CD 取最大值时，求 h 的值；
- (3) 如图 2，点 $E(0, -4)$ ，连接 AE ，将抛物线 M_1 的图象向上平移 m ($m > 1$) 个单位得到抛物线 M_2 ，当 $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ 时，若抛物线 M_2 与直线 AE 有两个交点，直接写出 m 的取值范围。

【答案】(1) $y = 2x^2 - 8x$

(2) $h = \frac{5}{2}$

(3) $6 \leq m < \frac{49}{8}$

【解析】

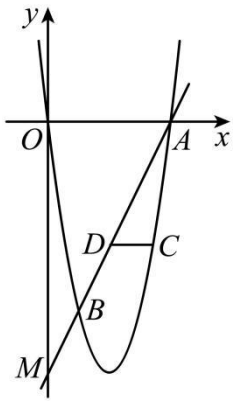
【分析】(1) 设 AB 交 y 轴于点 M ，由 $\tan \angle OAB = 2$ ，先求出点 M 的坐标，再求 AM 的解析式，把点 B 的解析式代入求出点 B 的坐标，最后把点 A 、 B 的坐标代入抛物线解析式 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 求解；

(2) 由点 $C(h, 2h^2 - 8h)$ ， $CD \parallel x$ 轴，得点 D 的纵坐标为 $2h^2 - 8h$ ，把点 D 纵坐标代入直线 AB 解析式求出点 D 的横坐标，用参数 h 表示出 CD 的长，再配方求最大值。

(3) 设平移后的抛物线解析式为 $y = 2x^2 - 8x + m$ ，求出直线 AE 上横坐标为 $\frac{3}{2}$ 和 $\frac{5}{2}$ 的两点 P 和点 Q 的坐标，当平移后的抛物线过点 Q 时有两个公共点，求出 m 的最小值，当平移后的抛物线与直线 AB 有唯一公共点时，求出 m 的值，从而求出 m 的取值范围。

【小问 1 详解】

解：设 AB 交 y 轴于点 M ，



$\because$ 点 A 坐标为 $(4,0)$,

$$\therefore OA = 4$$

$$\because \tan \angle OAB = \frac{OM}{OA} = 2$$

$$\therefore \frac{OM}{OA} = 2,$$

$$\therefore OM = 2OA = 8$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(0,-8)$

设 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

$\therefore AB$ 的解析式为 $y = 2x - 8$,

$\because$ 点 B 的纵坐标为 -6 ,

$\therefore$ 把 $y = -6$ 代入 $y = 2x - 8$ 得 $x = 1$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1,-6)$

$\because M_1: y = ax^2 + bx (a \neq 0)$ 过点 A 、 B

$$\therefore \begin{cases} a + b = -6 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\text{解之得} \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线 M_1 的表达式为 $y = 2x^2 - 8x$.

【小问 2 详解】

∵ 点 C 在抛物线 $y = 2x^2 - 8x$ 上, 点 C 的横坐标为 h

$$\therefore C(h, 2h^2 - 8h)$$

∵ $CD \parallel x$ 轴,

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的纵坐标为 } 2h^2 - 8h$$

把 $y = 2h^2 - 8h$ 代入 $y = 2x - 8$

$$\text{得 } x = h^2 - 4h + 4$$

$$\therefore \text{点 } D(h^2 - 4h + 4, 2h^2 - 8h)$$

$$\therefore CD = h - (h^2 - 4h + 4)$$

$$= -h^2 + 5h - 4$$

$$= -\left(h - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

∵ 点 C 为直线 AB 下方的抛物线上一动点

$$\therefore 1 \leq h \leq 4$$

$$\therefore \text{当 } h = \frac{5}{2} \text{ 时, } CD \text{ 的最大值为 } \frac{9}{4}.$$

【小问 3 详解】

设 AE 的解析式为 $y = k_1x + b_1$

∵ 直线 AE 过点 A 、 E

$$\therefore \begin{cases} b_1 = -4 \\ 4k_1 + b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解之得 } \begin{cases} k_1 = 1 \\ b_1 = -4 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AE \text{ 的解析式为 } y = x - 4$$

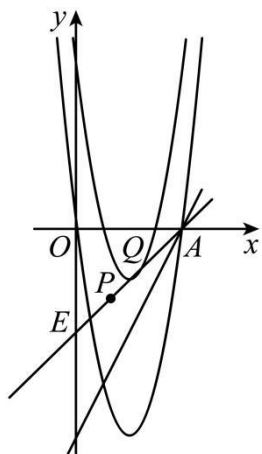
$$\text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y = -\frac{5}{2}, \text{ 直线 } AE \text{ 对应点为 } P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right),$$

$$\text{当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y = -\frac{3}{2}, \text{ 直线 } AE \text{ 对应点为 } Q\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

设抛物线 M_1 的图象向上平移 m ($m > 1$) 个单位得到抛物线 M_2 为 $y = 2x^2 - 8x + m$

当抛物线 M_2 经过点 $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 时, 抛物线 M_2 与线段 PQ 有一个公共点,

当抛物线 M_2 经过点 $Q\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 时, 有抛物线 M_2 与线段 PQ 两个公共点. 如图



当抛物线 M_2 与直线 AE 有唯一的公共点时

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 8x + m \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$2x^2 - 8x + m = x - 4$$

$$2x^2 - 9x + m + 4 = 0$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2(m + 4) = 0$$

$$\text{解之得 } m = \frac{49}{8}$$

$\therefore$ 当 $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ 时, 若抛物线 M_2 与直线 AE 有两个交点, m 的取值范围为 $6 \leq m < \frac{49}{8}$.

结合, 通过构建方程组, 利用根的判别式解决问题.